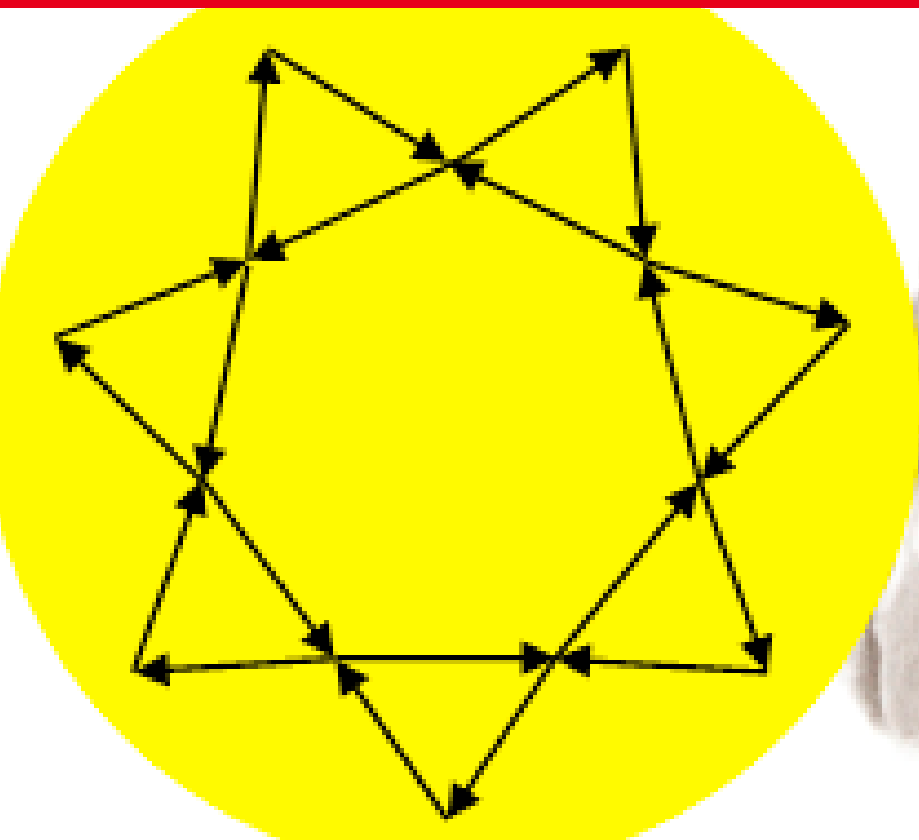




Usko Lahti

*Prof. Corvus Adamas:
Luvut
ja todistusmenetelmät*

Johdanto matematiikan perusteisiin
innokkaiden opiskelijoiden seurassa

USKO LAHTI

Prof. Corvus Adamas: Luvut ja todistusmenetelmät

Johdanto matematiikan perusteisiin
innokkaiden opiskelijoiden seurassa

MATEMAATIKOIDEN KUVAT
MAARUSKA HILTUNEN

TAMPERE 2015

ENSIMMÄINEN PAINOS

COPYRIGHT © 2015

[HTTP://TINYURL.COM/MATHEMATICA-APPENDIX](http://tinyurl.com/mathematica-appendix)

PALAUTTEENI@GMAIL.COM

[HTTP://WWW.WOLFRMALPHA.COM/](http://www.wolfrmalpha.com/)

KUSTANTAJA

BoD – Books on Demand, Helsinki, Suomi

VALMISTAJA

BoD – Books on Demand, Norderstedt, Saksa

ISBN 978-952-318-558-6

1 ■ Reaalilukujen algebralliset aksioomat

Prof. Corvus Adamas: Tervetuloa Gáranas, Lilarati, Shúa, Chía, Alfa ja Bet. Mukavaa, että kaikki oppilaani ovat ajoissa paikalla. Tällä matematiikan kurssilla on ilo tutustua lukuihin ja todistusmenetelmiin. Luentosalimme on mukava ja hyvin varustettu, tietokoneyhteydet toimivat. Meitä inspiroi ulkona sinistä yötä valaiseva tähtitaivas.

Aloitamme ”tavallisten lukujen” eli reaalilukujen määrittelyllä. Kurssin sisällysluettelosta kirjan lopusta näette kaikki aiheet.

Shúa En ole erityisen hyvä laskemaan päässälaskuja. Mekaaniset laskut vähänkin suuremmilla luvuilla, jakokulma ja monet muut tuottavat ongelmia ...

Älä murehdi joutavia. Jakokulma joutaa museoon värttinän viereen. Vähänkin suuremmat luvut ja mekaaniset laskut ja lausekkeet – jopa todistustehtävissä – naputtelemme tietokoneelle. Emme voi tuhjata kallista aikamme joutaviin laskelmiin ja rutiineihin. Arvioinnit ja varmistukset ovat tärkeitä, mutta ne opitaan käytännössä aikaa myöten. Panostamme ymmärrykseen, ideointiin ja luovuuteen!

Mutta aloittakaamme. Mitä **6** mahtaa tarkoittaa?

Lilarati Vaarallisen näköinen silmukka ... oppilaiden lukumäärä ... kuusi ...

Tällä kurssilla emme kiinnitä huomiota numeroiden ulkomuotoon emmekä sanottavasti lukujen rakenteeseen. Tarkoituksena on selvittää lukujen olemusta ja ominaisuuksia.

Läsnä olevien opiskelijoiden lukumäärä on todellakin 6. Emme kuitenkaan voi sitoa lukuja meihin, lumikiteiden sakaroiden määrään, muuttoreitteihin tai edes Linnunrataan. Luvut muodostavat matematiikan kulmakiven, joten niiden tulee olla mahdollisimman riippumattomia. Matematiikan pitää päteä jopa toisissa taivaankolkissa, aivan erilaisissa olosuhteissa. Kenties matemaatikot siellä ovat leppäkertun kokoisia, mutta matematiikka toimii silti.

LOGIIKKAA, JOUKKO-OPPIA JA MUITA PERUSKÄSITTEITÄ ESITTELEN LIITTEISSÄ SIVULTA 184 ALKAEN.

LUENTOJA TUKEE HELPPOKÄYTTÖINEN ILMAISOHJELMA WOLFRAMALPHA. AVAINSANAT LÖYDÄT TEKSTIN LOMASTA.

LUENTOJA TUKEE MYÖS MATEMATIIKKAOHJELMA MATHEMATICA, MUTTA OPISKELU EI EDELLYTÄ SEN TUNTEMISTA. MATHEMATICA-LIITTEIDEN LUETTELO ON SIVULLA 197.

Eräs mahdollisuus olisi lähteä jostain, jota on kaikkialla. Mikä sellainen olisi?

Gáranas Ei sellaista olekaan! ... niin paitsi juuri sitä, ettei ole ... olematonta, sitä on kaikkialla ... jos nyt näin voi sanoa ...

Hyvä havainto. Todellakin, lähtökohdaksi voidaan ottaa **tyhjäkkö** eli joukko, jossa ei ole yhtään alkioita. Näin teki **Ernst Zermelo** vuonna 1908 määritellessään luonnolliset luvut. Hän asetti tyhjäkkön tarkoittamaan lukua 0. Nyt on siis jo muutakin kuin pelkkää tyhjää, nimittäin juuri tuo luku 0. Zermelo määritteli:

0 = tyhjäkkö
1 = joukko, jonka alkio on 0
2 = joukko, jonka alkio on 1
3 = joukko, jonka alkio on 2
.....

Chia Voidaanko ajatella, että jos parveen, jossa on n lintua, tulee yksi lintu lisää, niin silloin parvessa on $\{n\}$ lintua?

Täsmälleen näin. Zermelon luonnollinen luku on ikään kuin sipuli, joissa on kyseisen luvun ilmoittama määrä kuoria ja ytimenä on tyhjäkkö. Sipulimaisuus näkyy, jos luku kirjoitetaan pelkästään tyhjäkkön $\emptyset$ ja joukkosulkeiden avulla. Esimerkiksi luku 6 on Zermelon mukaan

$$\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}$$

Luonnollisista luvuista saadaan murtoluvut pareina. Esimerkiksi luku $\frac{2}{3}$ voidaan tulkita lukujen 2 ja 3 muodostamaksi pariaksi. Murtoluvuista voidaan edelleen rakentaa muut luvut. Perusajatuksena on **konstruoida** monimutkaisemmat luvut yksinkertaisempien avulla. Vaikuttaa helpolta, mutta lento esimerkiksi lukuun π on pitkä ja matka on täynnä turbulensseja.

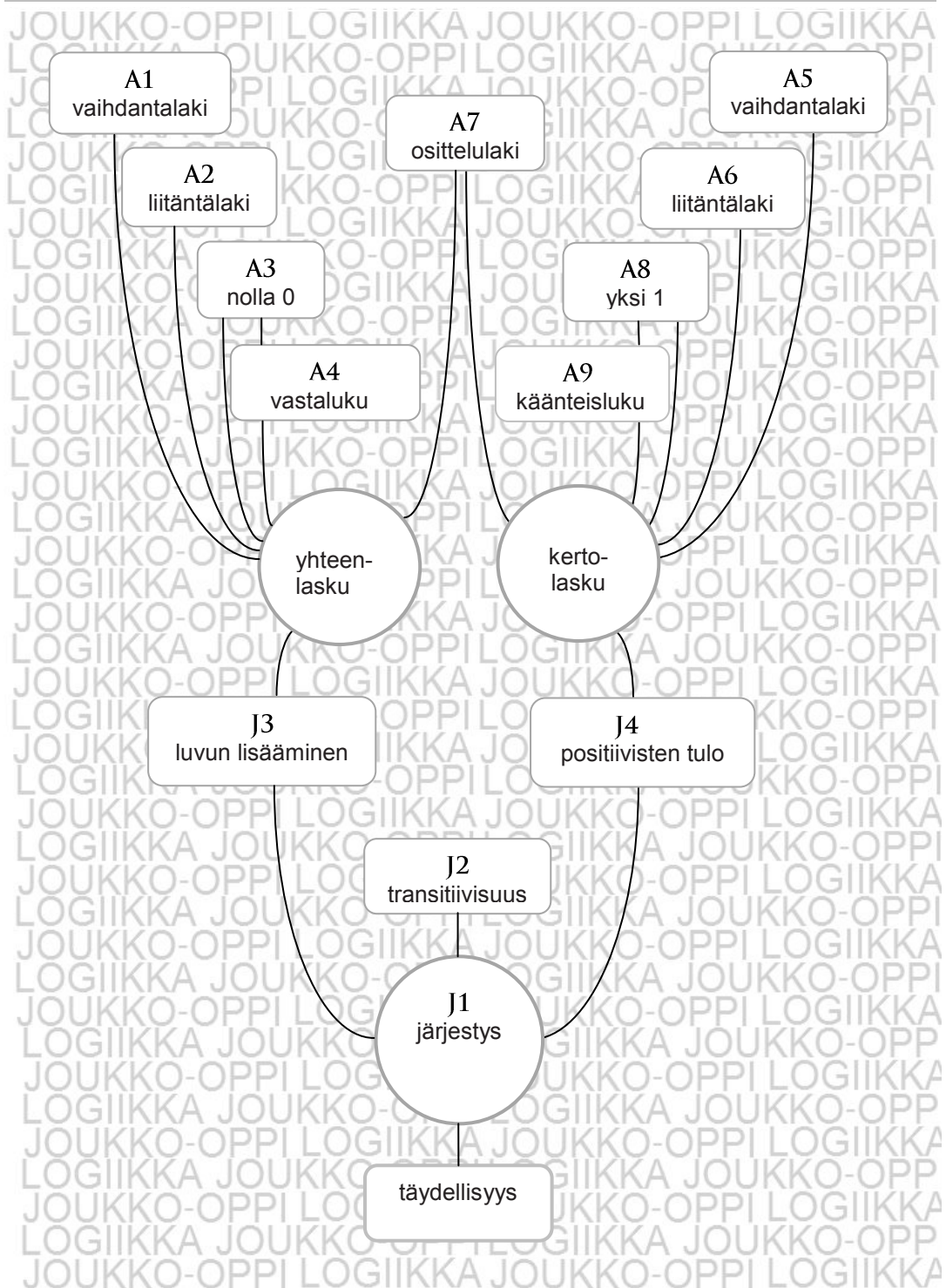
Tällä kurssilla lähestymme lukuja toisesta näkökulmasta. Määrittelemme **luvut** eli tarkemmin sanottuna **reaaliluvut** olennoiksi, jotka liittyvät toisiinsa tiettyjen yksinkertaisten ehtojen eli **aksioomien** mukaan. Kutsumme olentojamme alusta asti luvuiksi, vaikka ne oikeastaan ovat lukuja vasta täytettyään kaikki asetetut aksioomat.

Emme ajattele lukuja eristettyinä saarekkeina, vaan liitämme niihin olemassaoloa, laskutoimituksia ja suuruuden vertailua. Otamme käyttöön myös pari erityistä lukua.

Bel Mitä ne ovat?

Nolla ja yksi. Kaikilla luvuilla on myös vastaluku ja melkein kaikilla käänteisluku. Näidenkin olemassaolosta täytyy sopia aksioomassa. Mutta aloittakaamme. Tavoitteena on määritellä luvut kuvailemalla perusomaisuudet, jotka lukujen tulee täyttää. Tarkastelu jakautuu kolmeen osaan: algebraan, järjestykseen ja täydellisyyteen. Hahmottelin päivällä reaalilukujen määritelmää esittävän kaavion.

REAALILUVUT



Reaaliluvut ovat olentoja, jotka noudattavat kaavion aksioomia.

Järjestelmän perustana on logiikka ja joukko-oppi.

- ALGEBRALLISET AKSIOOMAT A1 - A9 sivu 4
- JÄRJESTYSAKSIOOMAT J1 - J4 sivu 15
- TÄYDELLISYYSAKSIOOMA sivu 19

REAALILUKUJEN ALGEBRA Reaalilukujen eli lyhyesti **lukujen** joukossa määritellään **yhteenlasku** ja **kertolasku** siten, että lukuihin x ja y liittyy aina määrätty luku,

- lukujen x ja y **summa** $x + y$,
- lukujen x ja y **tulo** $x \cdot y$ eli lyhyemmin xy , mikäli epäselvyyksiä ei synny,

joille pätevät

ALGEBRALLISET AKSIOOMAT

A1	$x + y = y + x$	• yhteenlaskun vaihdantalaki
A2	$x + (y + z) = (x + y) + z$	• yhteenlaskun liitântälaki
A3	On olemassa luku nolla eli 0 siten, että kaikilla luvuilla x pätee $x + 0 = x$.	
A4	Jokaista lukua x vastaa vastaluku $-x$ siten, että $x + (-x) = 0$.	
A5	$xy = yx$	• kertolaskun vaihdantalaki
A6	$x(yz) = (xy)z$	• kertolaskun liitântälaki
A7	$x(y + z) = xy + xz$	• kertolaskun osittelulaki
A8	On olemassa nollasta poikkeava luku yksi eli 1 siten, että kaikilla luvuilla x pätee $1x = x$.	
A9	Jokaista nollasta poikkeavaa lukua x vastaa käänteisluku $\frac{1}{x}$ siten, että $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.	

VÄHENNYSLASKUN MÄÄRITELMÄ Lukujen x ja y **erotus** on

$$x - y = x + (-y)$$

JAKOLASKUN MÄÄRITELMÄ Luvun x ja nollasta poikkeavan luvun y **osamäärä** on

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot x$$

Luku x on **jaettava** ja y **jakaja**. Lukujen x ja y osamäärä merkitään $\frac{x}{y}$ tai x/y tai $x : y$.

Kun x ja y ovat **luonnollisia lukuja**, osamäärää $\frac{x}{y}$ kutsutaan **murtoluvuksi**. Tällöin x on **osoittaja** ja y **nimittäjä**. Näitä nimityksiä käytetään usein muulloinkin jaettavasta ja jakajasta.

Rationaaliluvuilla tarkoitetaan murtolukuja, niiden vastalukuja ja lukua 0.

ESIMERKKI A) $x - x = x + (-x) = 0$

B) $\frac{x}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, kun x on nolasta poikkeava

C) $\frac{x}{1} = x \cdot \frac{1}{1} = x \cdot 1 = x$

Ω

Βεη Miksi aksioomat annetaan juuri noin? Mikä on tavoitteena?

Tavoitteena on määritellä matematiikan kulmakivi, reaali lukujen järjestelmä. Se on kaikkialla maailmassa käytössä, lukemattomien sovellusten ja matemaattisten järjestelmien perustana. Aksioomat valitaan mahdollisimman yksinkertaisiksi ja selkeiksi. Muistattehan, että vielä tarvitaan kaksi aksioomaryhmää. Palataan niihin kolmantena ja neljäntenä luentoyönä.

Chia Voiko olla useita lukuja nolla tai useita lukuja yksi?

Järkevä ajatus. Ei voi. Todistamme tämän nollan osalta, luvun yksi yksikäsitteisyys todistetaan vastaavalla tavalla.

LAUSE 1.1 Nolla on yksikäsitteinen, siis on olemassa vai yksi luku nolla.

TODISTUS Olkoot 0 ja $\hat{0}$ nollia. Nollan määrittelevän aksiooman A3 perusteella

$$\hat{0} + 0 = \hat{0}$$

$$0 + \hat{0} = 0$$

Yhteenlaskun vaihdantalain A1 perusteella näiden yhtälöiden vasemmat puolet ovat yhtä suuret joten myös oikeat puolet ovat yhtä suuret: $\hat{0} = 0$. ■



Atsteekkien nolla, joka on peräisin reliefistä vuodelta 702. Nollia on vain yksi, mutta nollan symboleita lukemattomia.

Ala On helpottavaa ajatella, että nolliä on vain yksi. Muutoinhan leipäkin olisi loppu monella eri tavalla. Vielä hurjempaa olisi, jos olisi kaksi lukua yksi. Entäpä vastaluku ja käänteisluku, ovatko nekin yksikäsitteisiä?

Ovat. Perustelemme asian käänteisluvun osalta. Vastaluvun yksikäsitteisyys osoitetaan samaan tapaan.

LAUSE 1.2 Luvun käänteisluku on yksikäsitteinen. Tämä tarkoittaa, että jokaisella nollasta poikkeavalla luvulla on täsmälleen yksi käänteisluku.

TODISTUS Oletamme, että nollasta poikkeavalla luvulla x olisi käänteisluvut y ja z . Aksiooman A9 perusteella $xy = 1$ ja $xz = 1$. Näiden avulla saadaan

$y = 1y$	• luvun yksi määritelmä A8
$= (xz)y$	• oletus
$= x(zy)$	• kertolaskun liitântälaki A6
$= x(yz)$	• kertolaskun vaihdantalaki A5
$= (xy)z$	• kertolaskun liitântälaki A6
$= 1z$	• oletus
$= z$	• luvun yksi määritelmä A8

Nähdään, että $y = z$, toisin sanoen käänteisluku on yksikäsitteinen. ■

SUPISTUSSÄÄNTÖ 1.3 Olkoon y nollasta poikkeava luku. Tällöin $y \cdot \frac{x}{y} = x$.

TODISTUS Koska $y \neq 0$, on osamäärä $\frac{x}{y}$ määritelty. Sievennetään väiteyhtälön vasenta puolta:

$y \cdot \frac{x}{y} = y \cdot \left(\frac{1}{y} \cdot x\right)$	• jakolaskun määritelmä
$= \left(y \cdot \frac{1}{y}\right) \cdot x$	• kertolaskun liitântälaki A6
$= 1x$	• käänteisluvun määritelmä A9
$= x$	• luvun yksi määritelmä A8

■

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 – 1953), saksalainen matemaatikko ja loogikko.

Prof. Ensimmäinen luento on takanapäin. Kiitoksia mielenkiinnosta, jatkamme ensi yönä.

2 ■ Reaalilukujen algebraa

Jos kuvittelet, että $2 \times 2 = 4$ on absoluuttinen totuus,
et ymmärrä matematiikasta yhtään mitään.
Albert Einstein

Tervetuloa, on hauskaa tavata virkeitä opiskelijoita. Yö pimenee, saamme rauhassa opiskella. Palataan lukujen ja yhtälöiden maailmaan.

LAUSE 2.1 Yhtälöt $x = y$ ja $x + z = y + z$ ovat yhtäpitäviä eli

$$x = y \iff x + z = y + z$$

TODISTUS $\Rightarrow$ Oletetaan, että $x = y$. Tällöin $x + z = y + z$, sillä lausekkeissa $x + z$ ja $y + z$ on samat yhteenlaskettavat.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että $x + z = y + z$. Tällöin edellisen kohdan perusteella

$$(x + z) + (-z) = (y + z) + (-z)$$

Sievennetään yhtälön vasenta ja oikeaa puolta.

$$\begin{aligned} x + (z + (-z)) &= y + (z + (-z)) && \bullet \text{ yhteenlaskun liitântäläki} \\ x + 0 &= y + 0 && \bullet \text{ vastaluvun määritelmä} \\ x &= y && \bullet \text{ nollan määritelmä} \end{aligned}$$

Oletuksesta $x + z = y + z$ seuraa siis $x = y$. ■

Edellisen lauseen mukaan yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun yhtälön molemmille puolille lisätään sama luku z . Korvataan z vastaluvulla $-z$ ja sovelletaan vähennyslaskun määritelmää. Saadaan

$$x = y \iff x - z = y - z$$

Shua Pätevätkö edelliset tulokset, jos yhteen- ja vähennyslasku korvataan kerto- ja jakolaskulla?

Kyllä pätevät edellyttäen, että kertoja ja jakaja ovat nollasta poikkeavia. Todistuksetkin sujuvat samaan tapaan, joten voimme sivuuttaa ne.

$$x = y \iff xz = yz \quad (z \neq 0)$$

$$x = y \iff \frac{x}{z} = \frac{y}{z} \quad (z \neq 0)$$

YHTEENVETO 2.2

Yhtäsuuruusmerkki jakaa yhtälön vasempaan ja oikeaan puoleen. Yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun yhtälön

- molemmille puolille lisätään sama luku,
- molemmilta puolilta vähennetään sama luku,
- molemmat puolet kerrotaan samalla, nollasta poikkeavalla luvulla,
- molemmat puolet jaetaan samalla, nollasta poikkeavalla luvulla.

Korostan, että yhtälöä ei pidä kertoa puolittain luvulla nolla. Asia tuntuu selvältä, jos nolla on merkitty pyörylänä 0. Kun sillä kerrotaan puolittain, muuttuu yhtälö heti muotoon $0 = 0$, jolloin hälytyskellot alkavat soida.

Virhe tapahtuu ja jää huomaamatta yleensä silloin, kun kertoja on monimutkaisessa muodossa. Esimerkiksi luku $1 + xy$ on yleensä nollasta poikkeava ja silloin sillä voi kertoa yhtälön puolittain. Mutta on muistettava pois sulkea ne luvut x ja y , jotka tekevät lausekkeen nollassi.

Silassati Entäpä yhtälön jakaminen puolittain nollassa?

Jakolasku perustuu aksioomaan A9 ja siinä ei suoda mahdollisuutta nollan käänteislukuun. Nollassa jakaminen on siis aina kielletty. Harvapa yrittää montaa kertaa jakaa nollassa, jos nolla on yksinkertainen 0. Virheitä alkaa tulla, kun jakaja on monimutkaisemmassa muodossa. Viittaankin äsken mainittuun nollassa kertomiseen.

Suhteellisuusteorian luoja **Albert Einstein** oli yhtälöihinsä nojautuen päättellyt, että maailmankaikkeus ei kutistu eikä laajene. Matemaatikko **Alexander Friedmann** julkaisi vuonna 1922 artikkelin, jossa hän osoitti Einsteinin yhtälöitä käyttäen, että maailmankaikkeus voi laajeta. Einstein ei voinut uskoa, että hänen teoriansa mukaan useat eksoottisetkin maailmankaikkeudet ovat mahdollisia. Friedmann lähetti Einsteinille kirjeen, jossa kertoi minkä virheen tämä oli tehnyt laskuissaan. Virheenä oli yhtälön jakaminen puolittain tekijällä, joka joskus voi saada arvon nolla. (Lähde: Maalampi, 2006)

Jatkossa pidämme yhteen- ja kertolaskun vaihdantalakeja ”itsestään selvinä”. Tämä tarkoittaa, että emme välttämättä huomauta soveltaessamme niitä. Samoin toimimme lukujen 0 ja 1 määritelmien kohdalla ja vähitellen kaikkien muidenkin algebrallisten aksioomien kohdalla.

TULON NOLLASÄÄNTÖ 2.3 Kahden luvun tulo on nolla täsmälleen silloin, kun ainakin toinen tulon tekijöistä on nolla:

$$xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ tai } y = 0$$

TODISTUS $\Leftarrow$ Osoitetaan ensin, että $0y = 0$ kaikilla luvuilla y . Muodostetaan yhtäpitävien yhtälöiden ketju. Päämääränä on yhtälö, jonka totuus on ilmeinen. Tällöin kaikki ketjun yhtälöt ovat tosia. Erityisesti ketjun ensimmäinen yhtälö on tosi.

$0y = 0$	• yhtälö, joka halutaan todistaa
$0y + yy = 0 + yy$	• lisätty molemmille puolille yy
$y(0 + y) = yy$	• kertolaskun osittelulaki, nollan määritelmä
$yy = yy$ TOSI	• nollan määritelmä

Alkuperäinen yhtälö on yhtäpitävä toden yhtälön kanssa, joten alkuperäinen yhtälö on tosi.

$\Rightarrow$ Olkoon $xy = 0$. Oletetaan, että esimerkiksi $y \neq 0$. Osoitetaan, että tällöin $x = 0$. Muodostetaan yhtäpitävien yhtälöiden ketju lähtemällä oletuksesta. Tällöin kaikki ketjun yhtälöt ovat tosia. Erityisesti ketjun viimeinen yhtälö on tosi.

$xy = 0$	• oletetaan todeksi
$xy = 0y$	• edellisen kohdan mukaan $0 = 0y$
$x = 0$	• yhtälö säilyy yhtäpitävänä kun molemmat puolet kerrotaan nolasta poikkeavalla luvulla

Kohdat " $\Leftarrow$ " ja " $\Rightarrow$ " osoittavat väitteen oikeaksi. ■

ESIMERKKI Olkoon y nolasta poikkeava. Tällöin jakolaskun määritelmän ja edellisen lauseen perusteella

$$\frac{0}{y} = 0 \cdot \frac{1}{y} = 0 \quad \Omega$$

MERKKISÄÄNNÖT 2.4 Kaikilla luvuilla x ja y on voimassa:

A) $-(-x) = x$ B) $(-1)x = -x$ C) $(-x)y = -(xy)$ D) $(-x)(-y) = xy$

TODISTUS Kohdissa A ja B muodostetaan yhtäpitävien yhtälöiden ketju. Päämääränä on yhtälö, jonka totuus on ilmeinen. Tällöin kaikki ketjun yhtälöt ovat tosia. Erityisesti ketjun ensimmäinen yhtälö on tosi.

A)	$-(-x) = x$	• todistettava yhtälö
	$-(-x) + (-x) = x + (-x)$	• lisätty $-x$ molemmille puolille
	$0 = 0$ TOSI	• vastaluvun määritelmä

B)	$(-1)x = -x$	• todistettava yhtälö
	$(-1)x + 1x = -x + x$	• lisätty $1x$ eli x molemmille puolille
	$((-1) + 1)x = -x + x$	• kertolaskun osittelulaki
	$0x = 0$	• vastaluvun määritelmä
	$0 = 0$	• tulon nollasääntö 2.3
	TOSI	

Kohdissa C ja D muutetaan väiteyhtälön vasen puoli asteittain väiteyhtälön oikeaksi puoleksi.

C) Kohtaa B ja kertolaskun liitântälakia soveltaen

$$(-x)y \stackrel{B}{=} ((-1)x)y \stackrel{A6}{=} (-1)(xy) \stackrel{B}{=} -(xy)$$

D) Kohtia C ja A soveltaen

$$(-x)(-y) \stackrel{C}{=} -(x(-y)) \stackrel{C}{=} -(-(xy)) \stackrel{A}{=} xy$$

■

JAKOSÄÄNNÖT 2.5 Oletetaan, että nimittäjissä olevat luvut ovat nollasta poikkeavia. Tällöin

$$A) \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv} \quad B) \frac{x}{y} = \frac{xv}{yv} \quad C) \frac{x}{\frac{u}{v}} = x \cdot \frac{v}{u} \quad D) \frac{\frac{x}{y}}{\frac{u}{v}} = \frac{xv}{yu} \quad E) \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{x+z}{y}$$

TODISTUS A) Aloitetaan väiteyhtälöstä ja muodostetaan yhtäpitävien yhtälöiden ketju. Päämääränä on yhtälö, jonka totuus on ilmeinen. Tällöin kaikki ketjun yhtälöt ovat tosia. Erityisesti ketjun ensimmäinen yhtälö on tosi.

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv} \quad \bullet \text{ yhtälö, joka pitää todistaa}$$

$$\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v}\right) \cdot (yv) = \frac{xu}{yv} \cdot (yv) \quad \bullet \text{ kerrottu puolittain luvulla } yv$$

$$\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) \cdot \left(v \cdot \frac{u}{v}\right) = \frac{xu}{yv} \cdot (yv) \quad \bullet \text{ kertolaskun vaihdanta- ja liitântälaki}$$

$$xu = xu \quad \bullet \text{ supistussääntö 1.3}$$

TOSI

B) Sovelletaan sivun 5 esimerkkiä ja edellistä kohtaa.

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{v}{v} = \frac{xv}{yv}$$

C) Sovelletaan osamäärän määritelmää, edellistä kohtaa ja supistussääntöä 1.3.

$$\frac{x}{\frac{u}{v}} = x \cdot \frac{1}{\frac{u}{v}} = x \cdot \frac{1 \cdot v}{\frac{u}{v} \cdot v} = x \cdot \frac{v}{u}$$

D) Sovelletaan kohtia C ja A.

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{u}{v}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{v}{u} = \frac{xv}{yu}$$

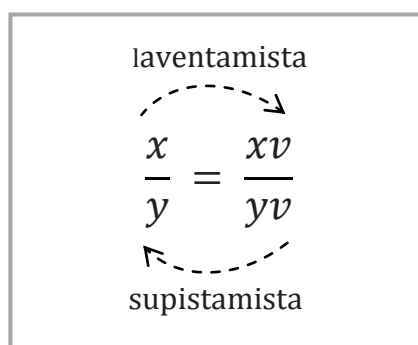
E) Sovelletaan jakolaskun määritelmää ja aksioomia.

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = x \cdot \frac{1}{y} + z \cdot \frac{1}{y} = (x + z) \cdot \frac{1}{y} = \frac{x+z}{y} \quad \blacksquare$$



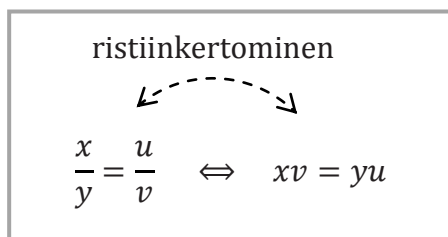
Al-Khwarizmi
(s. 14)

HUOMAUTUKSIA 1) Jakoviivan ylä- ja alapuolella olevien lukujen kertominen samalla luvulla on **laventamista**. Näiden lukujen jakaminen samalla luvulla on **supistamista**. Lauseen 2.5B perusteella laventaminen ja supistaminen säilyttää osamäärän arvon.



2) Lauseen 2.5C kohdan mukaan jakaminen luvulla $\frac{u}{v}$ merkitsee samaa kuin kertominen luvulla $\frac{v}{u}$.

3) Kertomalla yhtälön $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ molemmat puolet nollasta poikkeavalla luvulla yv saadaan yhtäpitävä yhtälö $xv = yu$. On tapana sanoa, että yhtälöt on saatu toisistaan ”kertomalla ristiin”.



USEAN LUVUN SUMMA JA TULO Yhteenlaskun liitäntälain mukaan $x + (y + z) = (x + y) + z$. Ryhmittelyllä ei siis ole vaikutusta summaan, joten sulut voidaan jättää merkinnästä pois. Näin tulee määritellyksi kolmen luvun x, y ja z summa $x + y + z$. Edelleen määritellään

neljän luvun summa $x + y + z + u = (x + y + z) + u$

viiden luvun summa $x + y + z + u + v = (x + y + z + u) + v$

kuuden luvun summa $x + y + z + u + v + w = (x + y + z + u + v) + w$

Tällä tavoin jatkaen voidaan määritellä vaikkapa sadan luvun summa. Vaihdamme lain mukaan yhteenlaskettavien järjestykselläkään ei ole merkitystä. Summalausekkeen yhteenlaskettavia kutsutaan **termeiksi**. Kaksiterminen summalauseke on **binomi** ja kolmiterminen **trinomi**. Esimerkiksi $(a + b)(x + y + z)$ on binomin ja trinomin tulo.

Vastaavalla tavalla määritellään useampien lukujen tulo. Esimerkiksi kolmen luvun x, y ja z tulo on $xyz = x(yz) = (xy)z$.

SUMMIEN KERTOLASKU Aksiomien avulla on helppoa todistaa summalausekkeiden termeittäin kertominen. Esimerkiksi $(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz$.

Tulo muodostetaan mukavasti termi termiltä ruudukossa. Symboli Σ viittaa tulojen yhteenlaskuun.

z	az	bz
y	ay	by
x	ax	bx
$\cdot$	a	b

$$\Sigma = ax + ay + az + bx + by + bz$$

Silavalu Entä alussa mainittu kuutonen? Voitteko jo, prof. Corvus Adamas, kertoa mikä se on?

Luku 1 on määritelty aksiomassa A8. Edelleen määritellään

$$2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 4 + 1, \quad 6 = 5 + 1$$

Bet Olemme aikaisemmin oppineet, että $2 \cdot 3 = 6$. Päteekö tämä edelleen?

Pätee. Kerrotaan termeittäin ja huomioidaan, että $1 \cdot 1 = 1$:

$$2 \cdot 3 = (1 + 1)(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

Garanas Mistä tiedetään, että esimerkiksi $2 \neq 1$?

Todistan epäsuorasti, että $2 \neq 1$. Vastaväite $2 = 1$ eli $1 + 1 = 0 + 1$. Lauseen 2.1 mukaan tämä yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $1 = 0$ kanssa. Tämä on aksioman A8 perusteella ristiriita. Vastaväite ei siis päde, joten $2 \neq 1$.

LUVUN NELIÖ JA KUUTIO ovat tärkeitä kertolaskun erikoistapauksia.

$$xx = x^2 \quad \begin{cases} x \text{ potenssiin kaksi} \\ x \text{ toiseen} \\ x: n \text{ neliö} \end{cases}$$

$$xxx = x^3 \quad \begin{cases} x \text{ potenssiin kolme} \\ x \text{ kolmanteen} \\ x: n \text{ kuutio} \end{cases}$$

MUISTIKAAVAT 2.6 Kaikille luvuille x ja y on voimassa

A) $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$

B) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

Ylemmät merkit vastaavat toisiaan, samoin alemmat.

TODISTUS Lasketaan kertolaskut ruudukoissa.

A) $(x - y)(x + y)$

y	xy	$-y^2$
x	x^2	$-xy$
$\cdot$	x	$-y$

$$\stackrel{\Sigma}{=} x^2 - y^2$$

B) $(x + y)^2$

y	xy	y^2
x	x^2	xy
$\cdot$	x	y

$$\stackrel{\Sigma}{=} x^2 + 2xy + y^2$$

$(x - y)^2$

$-y$	$-xy$	y^2
x	x^2	$-xy$
$\cdot$	x	$-y$

$$\stackrel{\Sigma}{=} x^2 - 2xy + y^2$$

■

HUOMAUTUS Algebrassa **kunta** tarkoittaa järjestelmää, joka toteuttaa aksioomat A1-A9. Kaikki tähän mennessä esitetyt määritelmät, merkinnät ja lauseet pätevät missä tahansa kunnassa. Reaali-luvuilla on siis kunnan rakenne.

Aksioomien A3 ja A8 mukaan jokaisessa kunnassa on ainakin kaksi lukua nolla 0 ja yksi 1. Herää kysymys, voiko kunta sisältää ainoastaan nämä luvut. Kun muita lukuja ei olisi, pitäisi olla $1 + 1 = 1$ tai $1 + 1 = 0$. Edellinen ei voi olla mahdollinen, sillä silloin olisi $1 = 0$ mikä on vastoin aksioomaa A8. On siis oltava $1 + 1 = 0$. Tutkimme, ovatko aksioomat tällöin voimassa.

Yhteenlaskun vaihdantalaki ja kertolaskun vaihdanta- ja liitäntälaki pätevät selvästi. Luvun 0 vastaluku on 0, luvun 1 vastaluku on 1. Luvun 1 käänteisluku on 1.

Yhteenlaskun liitäntälaki pätee, sillä jos 1^0 jokin luvuista x, y, z on 0, antavat $x + (y + z)$ ja $(x + y) + z$ tulokseksi kahden muun luvun summan ja ovat siis yhtä suuret, 2^0 kaikki luvut x, y, z ovat 1, on $x + (y + z) = 1 = (x + y) + z$.

Kertolaskun osittelulaki pätee, sillä $0(y + z) = 0 = 0y + 0z$ ja $1(y + z) = y + z = 1y + 1z$.

Muodostuu kunta, joka siis on suppein mahdollinen! Järjestysaksioomat J1-J4, joihin tutustumme seuraavalla luennolla, eivät tässä suppeassa kunnassa päde. Esimerkiksi aksiooman J3 mukaan

$$0 < 1 \Rightarrow 0 + 1 < 1 + 1 \Rightarrow 1 < 0$$

Tämä on ristiriita, sillä aksiooman J1 mukaan ei voi olla $0 < 1$ ja $1 < 0$.

Shua Huh, tulihan tuossa melkoisesti sulateltavaa. Mistä nimitys *algebra* on saanut alkunsa?

Nimitys juontuu 800-luvulta, jolloin irakilainen matemaatikko **Al-Khwarizmi** julkaisi teoksen *Al-Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Sana *algoritmi* tulee Al-Khwarizmin nimestä.

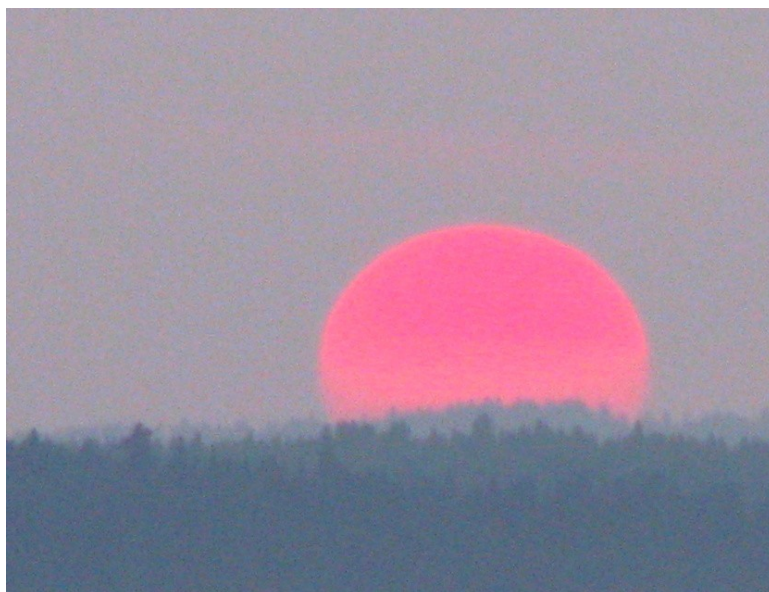
Albert Einstein (1879 – 1955), saksalaissyntyinen fyysikko, suhteellisuusteorian luoja, nobelisti, nerouden symboli. Koskuaikoina lukanvalvoja lausui Albertista:

Es werde nie in seinem Leben etwas Rechtes aus ihm werden.
Hän ei koskaan tule pärjäämään missään.

Lilavati Myös Ludwig van Beethovenin opettaja lausui Beethovenista, että ”tämä ei ollut ikinään oppinut mitään eikä tulisi koskaan säveltämään säädyllyiseen tyyliin”.

Alexander Alexandrovich Friedmann (1888 – 1925), venäläinen kosmologi ja matemaatikko.

Muhammad Al-Khwarizmi (780 – 850), irakilainen tähtitieteilijä ja matemaatikko, ”algebran isä”.



Aurinko, kotitähtemme.

- Miksi viikonlopun kauppalaskussasi on 1-alkuisia hintoja enemmän kuin 9-alkuisia hintoja?
- Miksi pienessä janassa on yhtä monta pistettä kuin koko universumissa?
- Miksi yksi on suurempi kuin nolla?
- Voiko luvun patentoida?
- Voiko ympyrä puikkelehtia äärettömän tiheän pisteikön lomitse?
- Mitä ovat Julia-joukot?
- Kuinka Nim voitetaan?
- Mikä on oktonitähti?
- Mitä ovat Gaussin alkuluvut?
- Mistä löytyvät pyramidiluvut?
- Mikä oli Huygensin anagrammi?
- Miksi laulukaskaan biologinen kello käy 17 vuotta?
- Kuka tunnettu matemaatikko oli juhlittu olympiavoittaja?



Olen pitkällä muuttomatkalla.
Lähdin Ukrainasta vuonna 2003,
etenen miljardi kilometriä tunnissa.



BoDTM
BOOKS on DEMAND

www.bod.fi