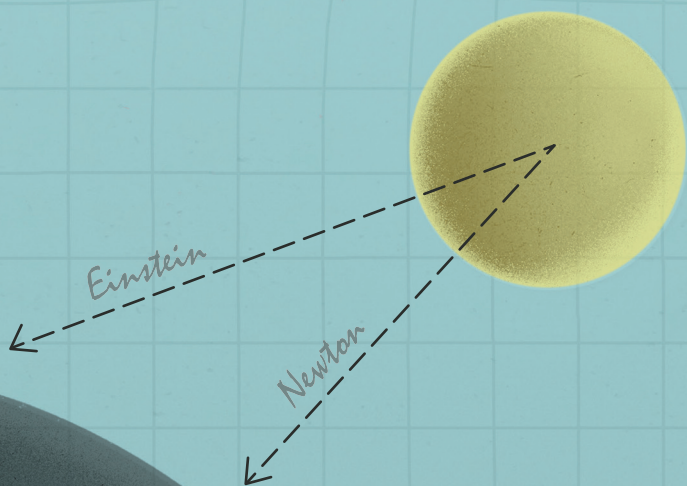


PAINOVOIMA III

Nopeudesta riippuva voima



**JORMA
RANTAKIVI**

Jorma Rantakivi
Painovoima III – Nopeudesta riippuva voima

Jorma Rantakivi

Painovoima III – Nopeudesta
riippuva voima

© 2025 Jorma Rantakivi

Taitto ja kansi: Books on Demand

Kustantaja: BoD · Books on Demand, Mannerheimintie 12 B, 00100 Helsinki, bod@bod.fi

Kirjapaino: Libri Plureos GmbH, Friedensallee 273, 22763 Hampuri, Saksa

ISBN: 978-952-89-3824-8

Sisällys

Johdanto.....	7
1. Taivaankappaleen rata	9
1.1 Merkinnoistä	9
1.2 Metriikka.....	9
1.3 Painovoimakoordinaatisto.....	10
1.4 Painovoimakoordinaatisto keskeiskentälle	12
1.5 Schwarzschildin ratkaisu	13
1.6 Yleinen ratkaisu.....	14
1.7 Numeerinen ratkaisu	17
1.8 Newtonin ämpäri	18
1.9 FORTRAN ohjelma	21
2. Numeeriset tulokset	23
2.1 Laskentatapaus 1: Merkuriuksen rata	23
2.2 Laskentatapaus 2: Auringon massa kerrottuna luvulla $0.4E6$	28
2.3 Laskentatapaus 3: Auringon massa kerrottuna luvulla $1.0E6$	32
2.4 Laskentatapaus 4: Auringon massa kerrottuna luvulla $2.522126365E6$	35
2.5 Laskentatapaus 5: Auringon massa kerrottuna luvulla $2.522126365E6$	39
2.6 Laskentatapaus 6: Pudotus mustaan aukkoon	43
2.7 Laskentatapaus 7: Aurinko, Maa, Kuu.....	51
2.8 Laskentatapaus 8: Kaksi mustaa aukkoa	53
2.8.1 Johdanto	53
2.8.2 Absoluuttinen avaruus, epäsymmetrinen x-positio, epäsymmetrinen nopeus.....	54
2.8.3 Absoluuttinen avaruus, epäsymmetrinen x-positio, symmetrinen nopeus...56	
2.8.4 Absoluuttinen avaruus, symmetrinen x-positio, epäsymmetrinen nopeus...58	
2.8.5 Absoluuttinen avaruus, symmetrinen x-positio, symmetrinen nopeus	60
2.8.6 Suhteellinen avaruus.....	63
2.8.7 Johtopäätöksiä.....	66
3. Voiman paikka- ja nopeusriippuvuus	67
3.1 Johdanto	67
3.2 Kappale etäisyydellä 2α mustasta aukosta	67
3.3 Kappale etäisyydellä 20α mustasta aukosta.....	68
3.4 Kappale etäisyydellä 200α mustasta aukosta	70
Viitteet.....	71
LIITE 1: FORTRAN OHJELMA	72

Johdanto

Maxwellin yhtälöt antavat sähkökentän ja magneettikentän, kun tunnetaan avaruuden varaustiheys ja virrantiheys. Kun varattu hiukkanen liikkuu sähkömagneettisessa kentässä, siihen kohdistuu Lorenzin voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

missä $\mathbf{F}$ on hiukkaseen vaikuttava voima, q on hiukkasen varaus, $\mathbf{E}$ on sähkökenttä, $\mathbf{v}$ on hiukkasen nopeus ja $\mathbf{B}$ on magneettikenttä. Varattuun hiukkaseen vaikuttava voima ei siis ole pelkästään paikan funktio, vaan riippuu myös varatun hiukkasen nopeudesta. En tunne historiaa kovin hyvin, mutta käsittääkseni, kun 1900-luvun alkupuolella haluttiin uudistaa painovoimateoriaa, esikuvana pidettiin Maxwellin yhtälöiden kaltaista kenttäteoriaa, jossa kappaleeseen vaikuttava painovoima olisi kappaleen paikan ja nopeuden funktio. Näin päädyttiin Einsteinin kenttäyhtälöihin, joiden ratkaisu antaa avaruudelle metrisen perustensorin. Metrinen perustensori kuvaa avaruuden kaareutumista. Metrinen perustensorin avulla voidaan laskea käyränpituus kaareutuvassa avaruudessa. Käyränpituuden minimoivat radat ovat mahdollisia taivaankappaleen ratoja kaareutuvassa avaruudessa.

Käyränpituus voidaan esittää määrättyä integraalina ja tällöin käyränpituuden minimoiva ajasta riippuva paikkavektori saadaan Eulerin yhtälöiden ratkaisuna. Eulerin yhtälöt ovat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, joissa esiintyy ajasta riippuvan paikkavektorin komponentit $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ja näiden ensimmäiset ja toiset derivaatat ajan suhteen. Differentiaaliyhtälön ratkaisu $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ on taivaankappaleen rata kaareutuvassa avaruudessa. Jos samaa Eulerin yhtälöiden ryhmää katsoo toisesta näkökulmasta, siinä voi nähdä lineaarisen yhtälöryhmän kiihtyvyyden komponenteille kappaleen paikan ja nopeuden funktiona. Koska kiihtyvyys on sama kuin voima massayksikköä kohti Eulerin yhtälöt antavat suoraan kappaleeseen vaikuttavan relativistisen voiman kappaleen paikan ja nopeuden funktiona. Kuten kirjassa jäljempänä esitetään tilanne ei ole näin yksinkertainen, koska kappaleen nopeus on erilainen kuhunkin avaruudessa liikkuvaan taivaankappaleeseen nähden,

eikä näin ollen kappaleelle voida käyttää jotakin yhtä tiettyä nopeutta sen rataa laskettaessa. Tämä ongelma kierretään kirjassa laskemalla voimat kullekin kappaleparille erikseen ja summaamalla nämä voimat. Tällä tavalla saadaan tulos, mutta tulos ei liene oikein muulloin kuin laskettaessa tapausta, jossa on vain kaksi vuorovaikutavaa kappaletta. Se lienee kylläkin hyvä approksimaatio relativistiselle ratkaisulle sellaisessa heikohkossa painovoimakentässä, jossa suhteellisuusteoreettiset efektit ovat pienehköjä kuten laskettaessa Aurinko, Kuu, Maa systeemiä, jolle relativistinen lasku antaa lähes täysin saman tuloksen kuin lasku Newtonin mekaniikan mukaan.

1. Taivaankappaleen rata

1.1 Merkinnöistä

Tässä kirjassa käytetään painoteknisistä ja luettavuussyistä sekaisin kahdenlaista merkintää nopeuksille ja kiihtyvyyksille

$$(1.1.1) \quad \frac{dx}{dt} = v_x = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = v_z = \dot{z}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = \ddot{x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a_y = \ddot{y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = a_z = \ddot{z}$$

1.2 Metriikka

Kuten mm. viitteessä [1] on esitetty avaruuden massajakautuma määrittää avaruuden metrisen perustensorin eli metriikan $g_{ij}(x,y,z)$. Ajan funktiona esitetyn käyrän $x(t), y(t), z(t)$ neliulotteinen käyräelementti saa muodon

(1.2.1)

$$ds = \sqrt{g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + g_{23}dydz + g_{44}d(ct)^2}$$

$$= \sqrt{g_{11}v_x^2 + g_{22}v_y^2 + g_{33}v_z^2 + g_{12}v_xv_y + g_{13}v_xv_z + g_{23}v_yv_z + g_{44}c^2} dt$$

ja neliulotteinen käyränpituus s saadaan aika-avaruudessa integraalina

(1.2.2)

$$s = \int_0^t \sqrt{g_{11}v_x^2 + g_{22}v_y^2 + g_{33}v_z^2 + g_{12}v_xv_y + g_{13}v_xv_z + g_{23}v_yv_z + g_{44}c^2} dt$$

Eo. kaavoissa v_x on x-akselin, v_y on y-akselin ja v_z on z-akselin suuntainen nopeus. Suoraviivaisessa Eukleideen avaruudessa $g_{44} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ ja $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$.

Yleisessä suhteellisuusteoriassa etsitään sellainen rata $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, joka minimoi radanpituuden s metriikalla g varustetussa avaruudessa. Ratalasku jakaantuu kahden osaan. Ensin on ratkaistava avaruuden metriikka g ja tämän jälkeen määritettävä joillakin reunaehdoilla lyhin viiva eli geodeettinen viiva tässä avaruudessa. Reunaehtona voidaan antaa esim. planeetan etäisyys auringosta aphelissä ja perihelissä. Tämä geodeettinen viiva on sitten taivaankappaleen rata.

Ratkaisu metriikaksi yleisessä tapauksessa (avaruudessa mielivaltainen massajakautuma) saadaan siirtymällä ns. painovoimakoordinaatistoon kuten viitteessä /1/ on esitetty ja alla lyhyesti kerrattu.

1.3 Painovoimakoordinaatisto

Olkoon avaruudessa tiheysjakautuma ρ . Tällöin Newtonin potentiaalikenttä U toteuttaa

$$(1.3.1) \quad U(x, y, z) = -G \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}} dx_0 dy_0 dz_0$$

$$(1.3.2) \quad \nabla^2 U = 4\pi G \rho$$

Keskeiskentässä, jossa M -massainen kappale sijaitsee origossa, potentiaalikenttä saa muodon

$$(1.3.3) \quad U = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

missä G on yleinen gravitaatiovakio.

Usean (n kpl) taivaankappaleen aiheuttama potentiaalikenttä pisteessä (x, y, z) lasketaan summana

$$(1.3.4) \quad U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n -\frac{GM_i}{r_i},$$

Yleinen suhteellisuusteoria antaa taivaankappaleen radan Eulerin yhtälöiden ratkaisuna. Ratkaisu on sellainen ajasta riippuva paikkavektori, joka minimoi radanpituuden kaareutuvassa avaruudessa. Samoja Eulerin yhtälöitä voidaan katsoa myös toisesta näkökulmasta. Ne voidaan tulkita yhtälöryhmäksi kappaleen kiihtyvyyden koordinaattiaksien suuntaisille komponenteille kappaleen nopeuden ja paikan funktiona suoraviivaisessa Eukleideen avaruudessa. Kiihtyvyydet voidaan ratkaista yhtälöryhmästä numeerisesti. Koska kiihtyvyys on sama kuin voima massayksikköä kohti, saadaan tulokseksi kappaleeseen vaikuttava relativistinen voima. Tällä tavalla voidaan laskea useiden kappaleiden radat yhtäaikaisesti yleisen suhteellisuusteorian mukaisesti. Kirjassa on esitetty tarkempi laskenta-algoritmi, FORTRAN-kielinen ohjelma ja useita laskettuja esimerkkitapauksia.

BoD



9 789528 938248