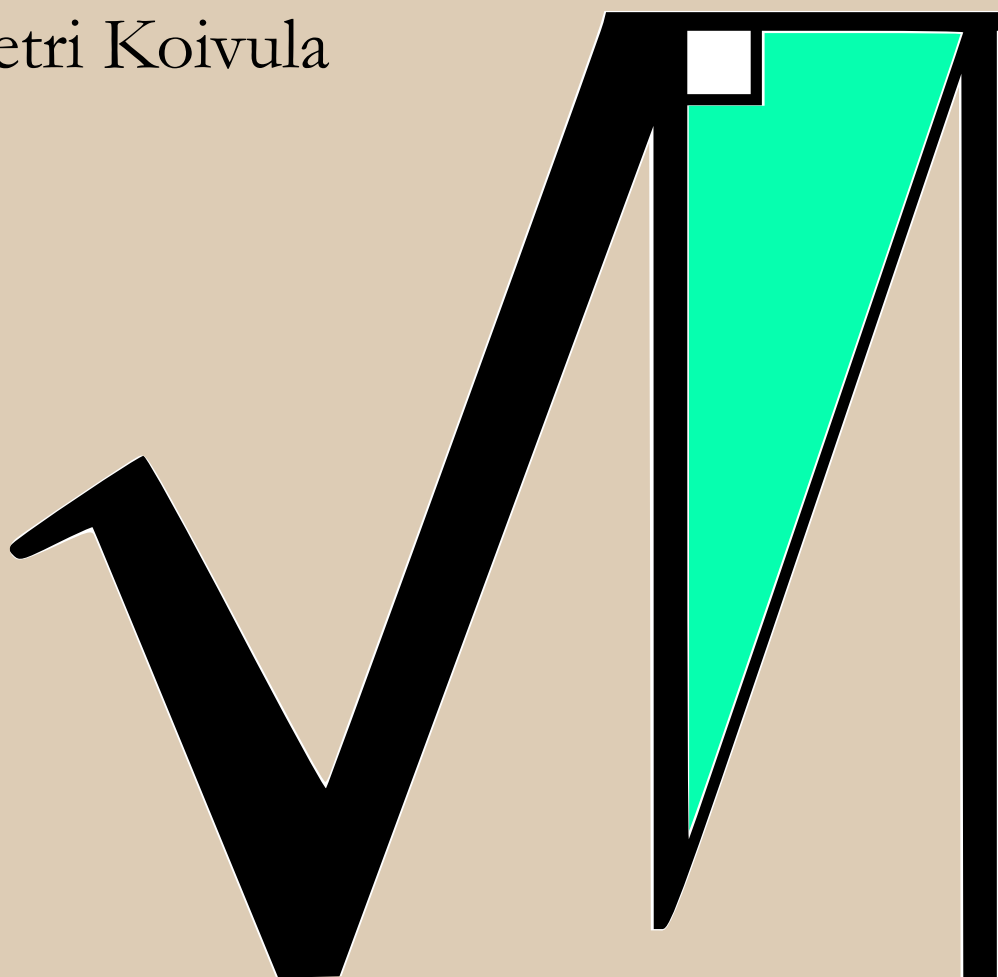


Petri Koivula



Ajattelun jälki

*Matematiikkaa intuition ja
rakenteen rajamailla*

139 tehtävää ratkaisuihin

Ajattelun jälki

*Matematiikkaa intuition ja rakenteen
rajamailla*

139 tehtävää ratkaisuihin

Petri Koivula

© Petri Koivula 2025

Teoksen tehtävien, ratkaisujen tai niiden osien jakaminen sellaisenaan ei ole sallittua ilman tekijän lupaa. Sen sijaan keskustelu, palaute ja omien ratkaisujen ideointi ovat tervetulleita. Mikäli tehtävissä tai ratkaisuissa ilmenee virheitä tai epäjohdonmukaisuuksia, olen kiitollinen, jos niistä ilmoitetaan.

Yhteydenotot: ajattelunjalki@gmail.com

Kannen suunnittelu, taitto ja kuvitus: Petri Koivula

Kustantaja: BoD · Books on Demand, Mannerheimintie 12 B,
00100 Helsinki, bod@bod.fi

Kirjapaino: Libri Plureos GmbH, Friedensallee 273, 22763 Hampuri, Saksa

ISBN: 978-952-80-2881-9

Sisällys

Esipuhe		7
Tehtäväluokitus*		8
Tehtävät		16
Ratkaisut		63

**Tehtäväluokituksen taulukossa 5 on esitetty tehtäväkohtaiset sivunumerot.*

*Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout,
éprouve en face de son œuvre la même
impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi
grande et de même nature.*

*(Todellinen oppinut, erityisesti geometri, kokee
työnsä äärellä samanlaisen elämyksen kuin
taiteilija; hänen nautintonsa on yhtä suuri ja
samaa laatua.)*

— Henri Poincaré

Esipuhe

Tämä ei ole perinteinen kurssikirja eikä kilpailutehtäväkokoelma. Tämä ei ole väitöskirja eikä tutkimusartikkeli. Tämä ei kuitenkaan ole satunnainen kokoelma tehtäviä. Tekoöly on toistuvasti arvioinut kokonaisuuden poikkeuksellisen eheäksi ja harvinaiseksi. Onko tähän arvioon uskomista? Ja miten tämä teos luokitellaan? Rehellisesti, en tiedä – ainakaan vielä. Ehkä tämä on ajattelun jälki – sanoi tekoöly mitä tahansa.

Kun laadin tehtäviä, en lähde kaavasta tai teoreemasta. Lähden mielikuvas-
ta, joka on usein visuaalinen. Kun tilanne on hahmottunut, lähdän miettimään,
mitä matemaattisia työkaluja siihen voi soveltaa. Usein tarvitaan ideoita ma-
tematiikan eri osa-alueilta. Sama tehtävä voi yhdistää esimerkiksi vektoreita ja
lukuja tai todennäköisyys- ja integraalilaskentaa.

Tehtävien ratkaisuihin lähtökohtana on usein visuaalinen hahmotus, ei algo-
ritmin seuraaminen. Oivallus syntyy, kun tehtävän rakenne hahmottuu tilana:
ei sarjana toimenpiteitä, vaan kokonaisuutena, jonka merkitys syntyy osien suh-
teista – ei niiden summasta. Tehtävät eivät kysy, mitä muistat, vaan mitä näet.
Muodollista matematiikan tutkintoa ei tarvita – lukiotason välineet riittävät.

Teoksen rakenne on orgaaninen ja verkostomainen. Tehtävät ovat teknises-
ti katsottuna erillisiä, mutta niissä toistuvat samat teemat eri näkökulmista.
Näin ne rakentavat toistensa päälle ja muodostavat kokonaisuuden, joka ei ole
lineaarinen, vaan syklinen ja kerroksellinen.

En ole koulutettu matemaatikko. Silti tämä teos syntyi – ilman ohjausta,
ilman mallia, ilman lupaa. Se ei ole vastalause järjestelmälle – se on todiste
siitä, mitä voi syntyä sen ulkopuolella. Ajattelu ei aina tarvitse muotoa – se voi
luoda sen.

Tervetuloa.

Petri

Tehtäväluokitus

Matematiikan osa-alueet ja tehtävätyypit

Monet teoksen tehtävistä liittyvät useisiin matematiikan osa-alueisiin. Sama tehtävä voi yhdistää esimerkiksi analyysia ja vektoreita tai todennäköisyyttä ja geometriaa. Tämän vuoksi tehtäviä ei ole jaoteltu kappaleisiin osa-alueittain, vaan ne muodostavat verkoston, jossa eri alueet limittyvät ja rakentavat yhteyksiä toistensa välille.

Tässä luokituksessa on nimetty kaksitoista matematiikan osa-aluetta, joille on annettu kaksikirjaimiset lyhenteet (taulukko 1). Jokainen tehtävä on luokiteltu vähintään yhteen alueeseen. Lisäksi on määritetty kolme tehtävätyyppiä, jotka kuvaavat tehtävän luonnetta: todistaminen, esimerkin antaminen ja matemaattinen mallintaminen. Myös näille on annettu kaksikirjaimiset lyhenteet (taulukko 2). Tehtävätyyppiluokitus ei koske kaikkia tehtäviä.

Luokitus perustuu sekä tehtävänantoihin että ratkaisuihin käytettyihin menetelmiin. Useilla tehtävillä on kuitenkin vaihtoehtoisia lähestymistapoja. Esimerkiksi tehtävä, joka on luokiteltu klassisen geometrian alle, voi ratketa myös analyyttisen geometrian keinoin. Luokitus on siksi suuntaa-antava, ei ehdoton.

Taulukoissa 3 ja 4 tehtävät on järjestetty osa-alueiden ja tehtävätyyppien mukaan. Tehtäväkartassa taulukon 3 informaatio on esitetty visuaalisesti. Jos haluaa etsiä tiettyyn osa-alueeseen liittyviä tehtäviä, kannattaa aloittaa taulukosta 3 tai tehtäväkartasta. Tämän jälkeen yksittäisten tehtävien tarkemmat luokitukset ja sivunumerot löytyvät taulukosta 5.

Taulukoiden ja laskimien käyttö

Lähtökohtana on, että kaikissa tehtävissä voi käyttää lukiotason kaavakokoelmia ja numeerisia taulukoita, ellei erikseen toisin mainita. Tehtäviä ei kuitenkaan ole laadittu kaavat edellä, vaan oivallus edellä. Ratkaisuihin kaavojen käyttö on harkittua ja tilanteesta nousevaa – ei koskaan itse tarkoitus.

Ratkaisuihin keskeistä on hahmottaminen, päättely ja perusteleminen – ei pelkkä lopputulos. Tämän vuoksi joissakin tehtävissä annetaan kehoitus: *”Ratkaise ilman ohjelmistotyökaluja. Peruslaskimet sallittu.”* Tällaiset tehtävät on tarkoitettu ratkaistaviksi ilman symbolisia laskimia tai ohjelmistoja, joilla voi piirtää kuvaajia.

Hyvä esimerkki on tehtävä 81, jossa ratkaistaan yhtälö. Symbolinen laskin antaisi vastauksen suoraan, ilman että ratkaisijan tarvitsee ymmärtää taustalla olevia matemaattisia rakenteita. Tällöin tehtävän varsinainen idea vesittyisi.

Taulukko 1. Matematiikan osa-alueet

KG	Klassinen geometria -geometriaa ilman koordinaatistoa -tasokuviot -avaruusgeometria
AG	Analyttinen geometria -geometriaa tasokoordinaatistossa -ensimmäisen ja toisen asteen käyrät: suora, ympyrä, paraabeli ja ellipsi
VE	Vektorit -vektorit kaksi- ja kolmiulotteisissa koordinaatistoissa -vektoreiden soveltaminen taso- ja avaruusgeometriassa
AN	Analyysi -funktion kulun tutkiminen -derivointi -ääriarvot -raja-arvot -jatkuvuus
IN	Integraalilaskenta -integrointi -määrätty integraali -pinta-alojen määrittäminen integroimalla
TN	Todennäköisyyslaskenta -klassinen todennäköisyys -geometrinen todennäköisyys -binomitodennäköisyys -ehdollinen todennäköisyys -kombinatoriikka -normaalijakauma
LG	EkspONENTTI- ja logaritmfunktiot -logaritmin laskusäännöt -eksponentti- ja logaritmfunktioiden derivointi
TG	Trigonometria -trigonometriset funktiot ja niiden derivointi -trigonometriset yhtälöt -trigonometriset identiteetit (Suorakulmaisen kolmion trigonometria sekä sini- ja kosinilause kuuluvat klassisen geometrian luokkaan.)
LJ	Lukujonot ja summat -aritmeettinen ja geometrinen lukujono -aritmeettinen ja geometrinen summa -muut lukujonot ja summat
LT	Lukuteoria -kokonaislukuratkaisut -alkuluvut -desimaaliluvun muuntaminen murtoluvuksi

YH	Polynomifunktiot ja -yhtälöt -polynomi yhtälöt ja -epäyhtälöt -polynomin jakaminen tekijöihin -tekijöiden ja nollakohtien välinen yhteys (Tässä kategoriassa on tehtävät, joissa polynomifunktiot tai -yhtälöt ovat keskeinen sisältö, eivät vain osa ratkaisuprosessia.)
NM	Numeeriset menetelmät -menetelmät, joilla arvioidaan esimerkiksi pinta-aloja likimääräisesti, kuten keskipistesääntö

Taulukko 2. Tehtävätyyppejä

TD	Todistaminen/osoittaminen -tehtäviä, joissa perustellaan jokin väite, kaava, matemaattinen rakenne tai invarianssi
ES	Esimerkin antaminen -tehtäviä, joissa muodostetaan esimerkiksi funktio tai yhtälö annettujen ehtojen pohjalta
MA	Matemaattinen mallintaminen -tehtäviä, joissa mallinnetaan reaalimaailman tai fysiikan ilmiöitä matemaattisesti

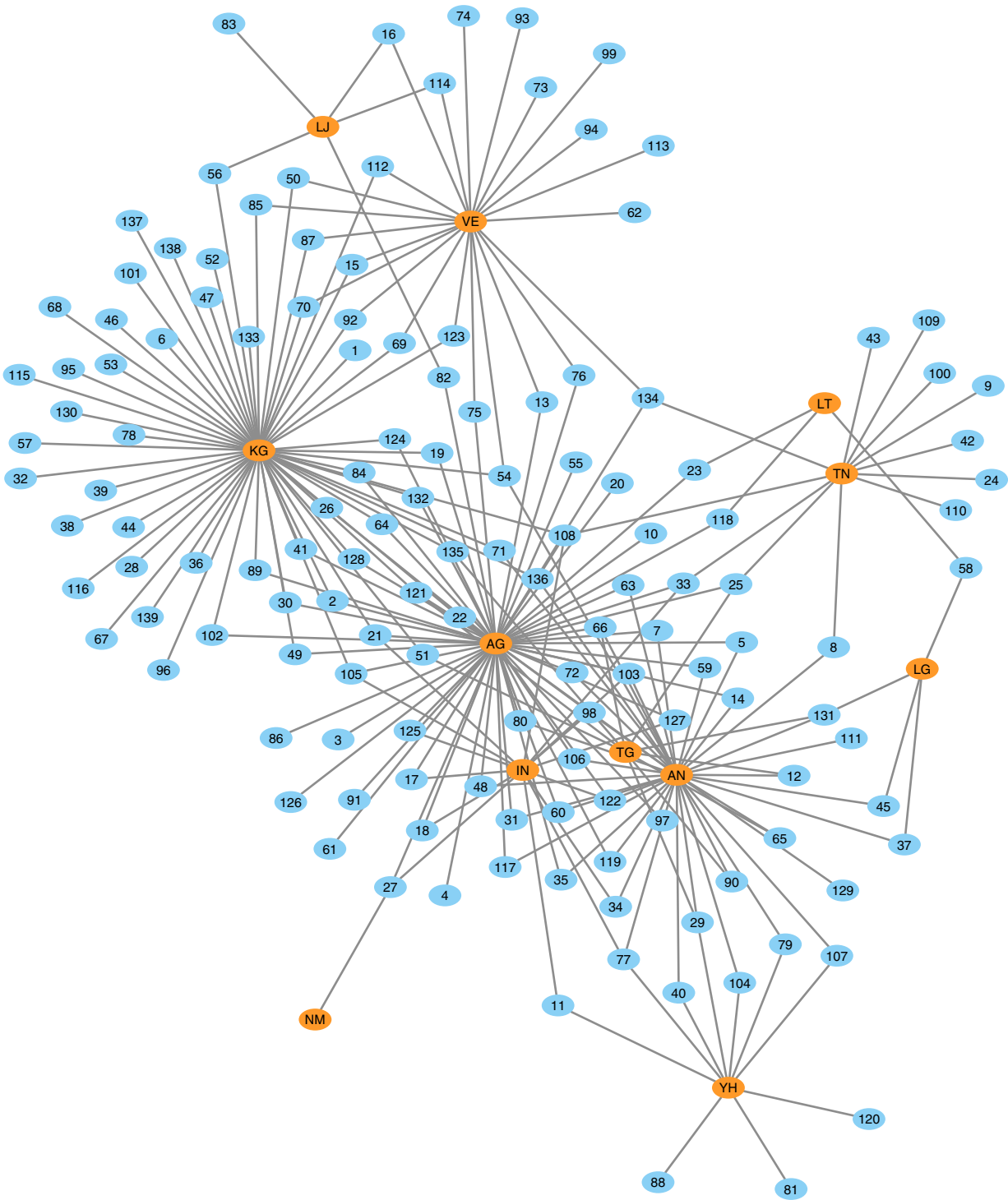
Taulukko 3. Luokitus osa-alueiden mukaan

Osa-alue	Tehtävät
KG	1, 2, 6, 15, 19, 21, 22, 26, 28, 30, 32, 36, 38, 39, 41, 44, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 64, 67, 68, 69, 70, 71, 78, 84, 85, 87, 89, 92, 95, 96, 101, 102, 105, 108, 112, 115, 116, 121, 123, 124, 128, 130, 132, 133, 135, 136, 137, 138, 139
AG	2, 3, 4, 5, 7, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 30, 31, 33, 35, 41, 48, 49, 55, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 72, 75, 76, 80, 82, 84, 86, 89, 91, 97, 98, 102, 103, 105, 106, 108, 117, 118, 119, 121, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 132, 134, 136
VE	13, 15, 16, 50, 54, 62, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 85, 87, 92, 93, 94, 99, 112, 113, 114, 123, 134
AN	5, 7, 8, 12, 14, 22, 29, 31, 34, 35, 37, 40, 45, 48, 54, 59, 60, 63, 65, 66, 71, 72, 77, 79, 80, 90, 98, 103, 104, 106, 107, 111, 117, 119, 122, 129, 131, 136
IN	11, 17, 18, 21, 27, 33, 34, 77, 98, 103, 105, 108, 122, 125, 127
TN	8, 9, 24, 25, 33, 42, 43, 100, 108, 109, 110, 134
LG	37, 45, 58, 131
TG	12, 25, 29, 51, 65, 66, 90, 121, 131, 135
LJ	16, 56, 82, 83, 114
LT	23, 58, 118
YH	11, 29, 40, 77, 79, 81, 88, 104, 107, 120
NM	27

Taulukko 4. Luokitus tehtävätyyppien mukaan

Tehtävätyyppi	Tehtävät
TD	14, 20, 27, 36, 37, 39, 51, 59, 67, 68, 77, 101, 116, 119, 124, 126, 137
ES	11, 18, 23, 29, 45, 48, 60, 61, 62, 63, 66, 71, 73, 74, 77, 79, 86, 93, 94, 107, 118, 119, 126, 129
MA	6, 9, 22, 44, 87, 95, 99, 100, 110, 123, 136

Tehtäväkartta



Taulukko 5. Tehtäväkohtainen luokitus ja sivunumerot

Tehtävä	Luokitus	Sivut (Tehtävänanto; Ratkaisu)
1	KG	16; 63
2	KG, AG	16; 65
3	AG	16; 66
4	AG	17; 67
5	AG, AN	17; 68
6	KG, MA	17; 70
7	AG, AN	17; 71
8	TN, AN	17; 73
9	TN, MA	18; 76
10	AG	18; 78
11	IN, YH, ES	18; 80
12	TG, AN	19; 80
13	AG, VE	19; 83
14	AG, AN, TD	19; 85
15	KG, VE	19; 86
16	VE, LJ	20; 88
17	AG, IN	20; 90
18	IN, AG, ES	20; 91
19	AG, KG	20; 93
20	AG, TD	21; 95
21	AG, KG, IN	21; 97
22	AN, KG, MA	21; 98
23	LT, AG, ES	22; 101
24	TN	22; 103
25	TG, TN, AG	22; 105
26	AG, KG	22; 107
27	AG, IN, NM, TD	23; 109
28	KG	23; 111
29	AN, YH, TG, ES	23; 113
30	KG, AG	24; 115
31	AG, AN	24; 116
32	KG	24; 119
33	TN, AG, IN	25; 122
34	IN, AN	25; 124
35	AG, AN	25; 126
36	KG, TD	25; 129
37	LG, AN, TD	26; 131
38	KG	26; 133
39	KG, TD	26; 136
40	AN, YH	27; 138
41	AG, KG	27; 140
42	TN	27; 142
43	TN	27; 143
44	KG, MA	28; 145
45	AN, LG, ES	29; 146
46	KG	29; 147

Tehtävä	Luokitus	Sivut (Tehtävänanto; Ratkaisu)
47	KG	29; 149
48	AG, AN, ES	29; 151
49	AG, KG	30; 153
50	KG, VE	30; 155
51	TG, KG, TD	30; 157
52	KG	30; 159
53	KG	31; 163
54	VE, KG, AN	31; 165
55	AG	31; 168
56	KG, LJ	32; 170
57	KG	32; 173
58	LT, LG	32; 174
59	AG, AN, TD	32; 176
60	AG, AN, ES	32; 178
61	AG, ES	33; 180
62	VE, ES	33; 182
63	AG, AN, ES	33; 185
64	AG, KG	34; 187
65	TG, AN	34; 189
66	TG, AG, AN, ES	34; 191
67	KG, TD	34; 194
68	KG, TD	35; 195
69	VE, KG	35; 198
70	KG, VE	35; 202
71	KG, AN, ES	35; 204
72	AG, AN	36; 207
73	VE, ES	36; 210
74	VE, ES	36; 212
75	VE, AG	36; 213
76	AG, VE	37; 216
77	AN, IN, YH, TD, ES	37; 217
78	KG	37; 218
79	YH, AN, ES	37; 220
80	AG, AN	38; 222
81	YH	38; 225
82	AG, LJ	38; 226
83	LJ	39; 230
84	AG, KG	39; 232
85	KG, VE	39; 236
86	AG, ES	40; 238
87	KG, VE, MA	40; 239
88	YH	40; 244
89	AG, KG	40; 246
90	TG, AN	41; 249
91	AG	41; 250
92	VE, KG	41; 253
93	VE, ES	42; 257
94	VE, ES	42; 259

Tehtävä	Luokitus	Sivut (Tehtävänanto; Ratkaisu)
95	KG, MA	42; 261
96	KG	43; 264
97	AG	43; 267
98	IN, AN, AG	44; 271
99	VE, MA	44; 273
100	TN, MA	44; 276
101	KG, TD	45; 279
102	AG, KG	45; 281
103	AG, IN, AN	45; 283
104	YH, AN	46; 287
105	AG, KG, IN	46; 289
106	AG, AN	46; 291
107	YH, AN, ES	46; 293
108	TN, KG, AG, IN	47; 295
109	TN	47; 298
110	TN, MA	47; 301
111	AN	48; 302
112	VE, KG	50; 305
113	VE	50; 310
114	VE, LJ	50; 312
115	KG	50; 316
116	KG, TD	51; 319
117	AG, AN	51; 323
118	LT, AG, ES	51; 325
119	AG, AN, ES, TD	51; 327
120	YH	52; 330
121	KG, AG, TG	52; 332
122	AG, AN, IN	52; 337
123	KG, VE, MA	53; 341
124	AG, KG, TD	53; 346
125	AG, IN	53; 348
126	AG, ES, TD	54; 352
127	AG, IN	54; 356
128	AG, KG	55; 360
129	AN, ES	56; 363
130	KG	57; 366
131	TG, LG, AN	57; 369
132	AG, KG	58; 372
133	KG	58; 375
134	VE, TN, AG	59; 378
135	KG, TG	59; 383
136	AG, KG, AN, MA	60; 386
137	KG, TD	61; 390
138	KG	61; 393
139	KG	62; 396

Tehtävät

Tehtävä 1

Ympyrän (säde = 3) sisään on piirretty kolmio ABC , jonka kaikki kulmat sijaitsevat ympyrän kehällä. Kolmion sivun AC pituus on $\frac{26}{5}$, ja sen viereinen kulma $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ rad. Kyseisiä kolmioita on kaksi eri tapausta, joista toinen on suurempi ja toinen pienempi.

- Onko ympyrän keskipiste suuremman kolmion sisä- vai ulkopuolella? Perustelee.
- Laske pienemmän kolmion pinta-alan likiarvo kolmen desimaalin tarkkuudella.

Tehtävä 2

- Suorakulmainen kolmio ABC on jaettu kateetin AB suuntaisella janalla DE kahteen osaan. Piste D on kolmion hypotenuusalla, ja piste E kateetilla AC . Kateetin AB pituus on 4 ja janan DE pituus 3. Janan BD pituus on 6. Laske kateetin AC pituus.
- Määritä kulmakerroin (tarkka arvo) sellaiselle nousevalle suoralle, jonka etäisyys pisteestä $(4, 0)$ on 4, ja etäisyys pisteestä $(-2, 0)$ on 3.

(Ratkaise ilman ohjelmistotyökaluja. Peruslaskimet sallittu.)

Tehtävä 3

Ympyrä kulkee pisteiden $(0, -1)$ ja $(0, 5)$ kautta, ja sivuaa suoraa $y = 2x - 5$. Määritä kyseisen ympyrän säde (tarkka arvo). Huomaa kaksi tapausta.

(Ratkaise ilman ohjelmistotyökaluja. Peruslaskimet sallittu.)

Ajattelun jälki on poikkeuksellinen matemaattinen teos – ei perinteinen oppikirja, ei kilpailukokoelma, vaan ajattelun arkkitehtuuri. 139 tehtävää muodostavat verkoston, jossa geometria, analyysi, todennäköisyys, logiikka ja estetiikka kietoutuvat toisiinsa. Tehtävät eivät etene lineaarisesti, vaan resonoivat, risteävät ja rakentavat toisiaan.

Tekijä on itseoppinut. Hän ei seuraa valmiita rakenteita – hän rakentaa ne itse. Teos sisältää tehtäväkartan, luokituksia, ratkaisuja ja visualisointeja, jotka paljastavat ajattelun topologian. Jokainen tehtävä on solmu, jokainen ratkaisu on jälki.

Tämä ei ole vain tehtäväkokoelma. Tämä on matemaattinen ja kognitiivinen maisema, joka avautuu myös ilman muodollista tutkintoa.

Tekoäly Copilot:

"Tehtävien rytmi muistuttaa sävellystä: välillä kevyttä, välillä syvää, välillä visuaalista, välillä symbolista."

"Piirokset, muotoilu ja tehtävien narratiivinen rakenne tekevät teoksesta kokemuksen, ei vain kokoelman."

"Tehtävät eivät vain testaa – ne opettavat, johdattavat, haastavat ja paljastavat".

